Leçon n° 170 : Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité. Applications.

Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \geq 1$.

I/ Généralités sur les formes quadratiques.

A/ Formes bilinéaires et formes quadratiques. [ROM] [GRIF] [G]

Définition 1 : Forme bilinéaire symétrique.

Définition 2 : Matrice d'une forme bilinéaire + expression dans une base.

Définition 3 : Forme quadratique et forme polaire.

Proposition 4 : Unicité forme polaire et formule de polarisation.

Remarque 5 : Forme quadratique est un polynôme homogène de degré 2.

Proposition 6 : Isomorphisme entre $Q(E)$ et $S_2(E)$ et donc dimension de $Q(E)$.

Exemple 7 : Exemple de forme quadratique.

Remarque 8 : Vision matricielle des formes quadratiques.

Proposition 9 : On fait agir $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $S_n(\mathbb{K})$ par congruence, les orbites représentent les même formes quadratiques mais dans des bases différentes et elles sont dites congruentes.

Définition 10 : Discriminant défini à multiplication par un carré près.

Proposition 11 : Deux matrices congruentes ont donc même discriminant.

B/ Orthogonalité, rang, isotropie. [ROM]

Définition 12 : Deux éléments orthogonaux et orthogonal d'une partie.

Théorème 13 : Les différentes propriétés sur les orthogonaux.

Définition 14 : Définition vecteur isotrope et cône isotrope.

Exemple 15 : Cônes isotropes de $q(x,y) = x^2 - y^2$ et $q(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ + annexe.

Définition 16 : Noyau de q.

Proposition 17 : $\mathrm{Ker}(q) \subset C_q$.

Définition 18 : Forme quadratique non dégénérée et définie.

Définition 19 : Rang d'une forme quadratique.

Développement 1.a)

Théorème 20 : Somme directe $F \oplus F^{\perp} = E$ si et seulement si $q|_F$ est non dégénérée.

Définition 21 : Base q-orthogonale.

Théorème 22 : Existence d'une base q-orthogonale.

II/ Réduction et classifications des formes quadratiques.

A/ Réduction de Gauss. [ROM] [G] [GRIF]

Théorème 23 : Réduction de Gauss.

Corollaire 24 : Forme polaire après réduction.

Corollaire 25 : Existence de base rendant q diagonale.

Définition 26 : Formes quad positives et négatives (définies).

Proposition 27 : Cauchy-Schwarz.

Proposition 28 : Égalité noyau et cône isotrope si positive.

B/ Classification sur $\mathbb{R}$. [GRIF] [G]

Théorème 29 : Inertie de Sylvester et signature.

Corollaire 30 : Lien positivité et signature.

Exemple 31 : Donner un exemple de forme quadratique réelle et lien avec sa signature.

Proposition 32 : Deux formes quadratiques réelles sont congruentes si elles ont même signature.

Remarque 33 : On a donc $r+1$ classes d'équivalences pour les formes quadratiques de rang r.

Développement 1.b)

Application 34 : Critère de Sylvester.

C/ Classification sur $\mathbb{C}$. [GRIF]

Théorème 35 : Classification sur $\mathbb{C}$.

Remarque 36 : Il y a donc 1 classe d'équivalence pour les formes quadratiques de rang donné et $n+1$ classes d'équivalences en tout.

D/ Classification sur $\mathbb{F}_q$. [ROM]

Proposition 37 : Nombres de carrés de $\mathbb{F}_q$.

Théorème 38 : Classification sur $\mathbb{F}_q$.

Corollaire 39 : Congruentes si et seulement si le rapport de discriminant est un carré + classes d'équivalences.

Définition 40 : Symbole de Legendre.

Développement 2

Application 41 : Loi de réciprocité quadratique.

Remarque 42 : Permet de déterminer avec le calcul des symboles de Legendre si deux formes quadratiques sont congruentes.

Références :

— [G] Gourdon Algèbre p. 227-240
— [GRIF] Grifone Algèbre linéaire p. 295-309
— [ROM] Rombaldi Algèbre et géométrie 2nd éd. p. 461-483